

# インタラクティブな解軌道観察の可能な 教育用慣性ロータ型倒立振子実験教材

古川 誉大<sup>1</sup> 山本 欧<sup>1,a)</sup>

**概要:** 本稿では、現代制御理論の学習支援を目的とし、状態空間における解軌道を実働状態でグラフィカルかつインタラクティブに観察できる慣性ロータ型倒立振子実験教材の提案と実装について述べる。慣性ロータはロボットや人工衛星等の姿勢制御にも用いられ実用性が高く、その倒立動作も視覚的な面白さを持っているため、現代制御理論を学ぶ教材として優れている。本教材は倒立振子と制御用ボード、および実働状態で制御パラメータ変更や状態空間の解軌道を観察できるホスト PC 側のアプリケーションからなる。本教材により、学習者は振子の実働状態でインタラクティブにパラメータ変更や解軌道の観察が行え、現代制御理論の理解を深めることができる。また小型・安価な部品で構成されているため、多人数の実験授業においても学習者個々に配備し易い。

## 1. はじめに

倒立振子は古くから現代制御理論の実証のために研究がなされており、現在に至るまで、回転型や車輪型、慣性ロータ型などの多くの倒立振子が開発されている。同時に初学者を対象とした教材用倒立振子の研究も数多く行われている [1][2] [3]。

慣性ロータ型倒立振子は、モータにより回転する慣性ロータに発生する反トルクを利用してバランスを取る倒立振子である。慣性ロータはロボットや人工衛星等の姿勢制御にも用いられ実用性が高い。またその倒立動作の視覚的な面白さは現代制御理論のデモンストレーションとしても優れており、初学者の工学に対する興味を引き出し、学習意欲を向上させる作用が期待できる。

実験教材として考えた場合、学習者のグループに 1 台の装置を配備するより個々に配備した方が、学習者が自身の裁量で学習を進めることができるため望ましい。しかし、従来の慣性ロータ型倒立振子の実験教材は、装置のサイズ・コストの面から多人数の実験授業での個人配備は難しい。また慣性ロータ型倒立振子の安定化制御には、現代制御理論による状態フィードバック制御を用いる。状態フィードバック制御では、制御対象の状態を決める変数（状態変数）にフィードバックをかけることで安定化制御を行う手法である。状態変数の作る空間（状態空間）において、制御対象の状態は 1 つの点として表され、その軌跡（解軌跡）と

して表される対象の振る舞いが状態フィードバック制御において重要な意味を持つ。例えば、状態変数を全て 0 となるよう制御するレギュレータ制御においては、解軌跡は初期値に対応する点から原点に向かう曲線となるが、その曲線はフィードバックゲインの値により様々に変化し、振動が生じる場合は解軌跡は円運動を含む軌跡となる。個々の状態変数の変化をリアルタイムに表示する倒立振子教材として [4] があるが、状態変数個々の変化を観察できても、状態空間における解軌跡のように対象の挙動を図形的・総合的に把握することは困難である。

以上の背景から、本研究では多人数の実験授業においても学習者個々に配備し易く、解軌跡を状態空間の曲線としてリアルタイムに表示可能な小型・安価な慣性ロータ型倒立振子実験教材の提案と実装を行った。

## 2. 本教材の概要

図 1 に本教材の概略図を示す。倒立振子のボディ角度  $\theta_b$  及び慣性ロータの角速度  $\dot{\theta}_b$  を各種センサにより取得し、制御用ボード (NUCLEO-F446RE) を用いて状態変数及び制御量の算出を行う。また、制御用ボードは USB ケーブルを介して PC と接続されており、シリアル通信にてフィードバックゲインや状態変数のデータの送受信を可能としている。PC 側では、Processing で開発されたアプリケーションにより、フィードバックゲインの設定及び倒立動作の開始命令と各状態変数のグラフ及び解軌跡のリアルタイム表示を行う。

<sup>1</sup> 東京電機大学

a) ou@mail.dendai.ac.jp

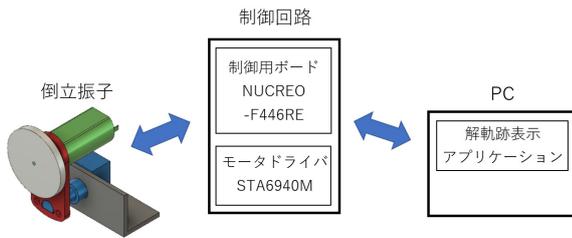


図 1 システムの概略図

### 3. 倒立振子の安定化制御

図 2 に振子の力学モデルを示す。  $\theta_b$  は倒立振子のボディ角度，  $\theta_w$  は慣性ロータの角度，  $l$  は振り回転軸-慣性ロータ回転軸間の長さ，  $T_m$  は慣性ロータによって発生する反トルクを表す。慣性ロータ型倒立振子は，反トルク  $T_m$  を利用して倒立動作を行う。力学モデルから得られる運動方程式を一階連立微分方程式に変形することで状態方程式を求めることができる。状態ベクトルは状態変数からなるベクトルであり，本倒立振子では  $\theta_b$ ：倒立振子のボディ角度，  $\dot{\theta}_b$ ：倒立振子のボディ角速度，  $\dot{\theta}_w$ ：慣性ロータの角速度を状態変数として選んだ。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$x$ ：状態ベクトル

$u$ ：制御ベクトル

$A$ ：システム行列

$B$ ：配分行列

倒立振子の安定化制御には，状態フィードバック制御を用いる。状態フィードバック制御では，状態変数（システムの出力）とフィードバックゲインの積の総和から制御量（システムの入力）を算出する [5] [6]。

状態フィードバック制御系により得られる制御量  $u$  の算出式を (2) 式に示す。

$$u = k_1\theta_b + k_2\dot{\theta}_b + k_3\dot{\theta}_w \quad (2)$$

$u$ ：制御量

$k_n$ ：状態フィードバックゲイン

### 4. 倒立振子装置の構成

図 3 に装置の外観図を示す。本研究で開発した倒立振子装置は，高さ 51 mm，幅 42 mm，奥行 50 mm となっており，従来の慣性ロータ型倒立振子教材と比べて非常に小型になっている。

#### 4.1 慣性ロータ及び振りボディ

慣性ロータと振子のボディ部はポリカーボネート板より

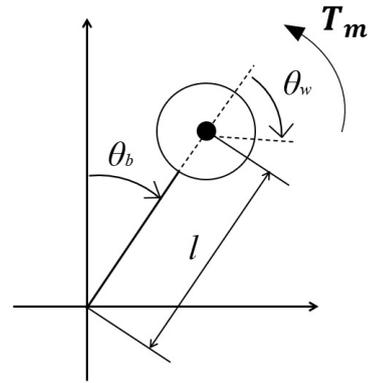


図 2 振子の力学モデル

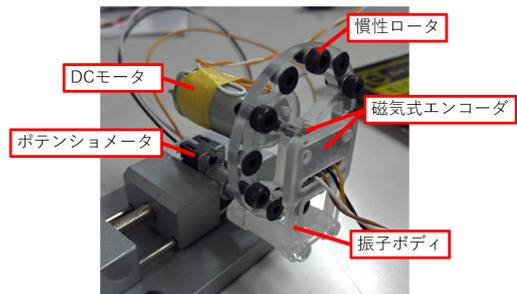


図 3 装置の外観図

切削したものをを用いた。これにより，剛性を確保しつつ振子の重量を抑えることができ，かつ製作コストの低減を実現することができた。慣性ロータの円周上には等間隔でねじ穴が開けられており，そこに固定するキャップボルトの個数によって慣性モーメントを調整することができる。

#### 4.2 DC モータ

DC モータには，安価な小型模型用モータ (F-05-12948-0) を用いた。減速機などは介さず，出力軸に直接慣性ロータを圧入して組み付けている。

#### 4.3 ポテンシオメータと磁気式エンコーダ

ポテンシオメータ (Tocos：TCQ96A02) に対して，制御用ボード上の 12bitADC を用いることで振りボディの回転角を取得している。また，本装置ではポテンシオメータの軸を直接倒立振子の回転軸としており，これにより軸周りの構造の簡素化を図っている。

磁気式エンコーダ (ams：AS5601) では，慣性ロータの回転角を取得している。I2C 通信を用いて AS5601 から 12bit の角度データを取得し，F446RE 内で微分演算を行い，角速度に変換している。

#### 4.4 制御回路

本装置の制御回路は，制御用ボードとモータドライバ IC (サンケン電気：STA6940M) により構成されている。制御用ボード NUCLEO-F446RE は，STM32 マイコンの開発

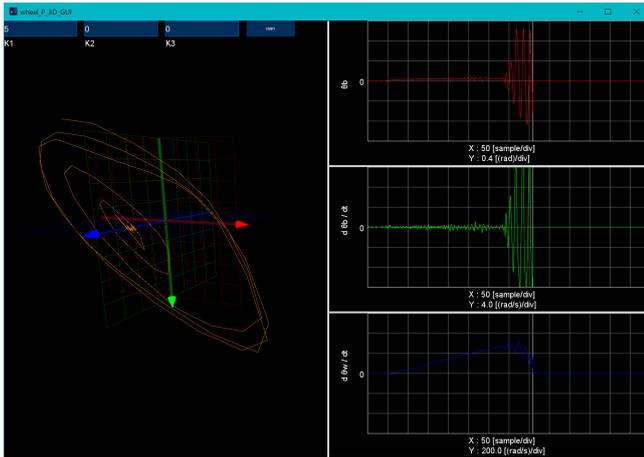


図 4 本アプリケーションの表示画面

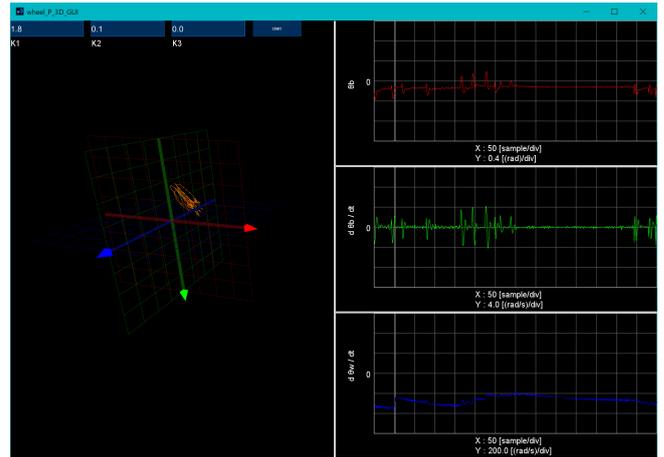


図 5 倒立動作時の解軌跡 ( $k_1 = 1.8, k_2 = 0.1, k_3 = 0.0$ )

ボードである。ブラウザ上の開発環境を無料で利用することができるため、教育現場に適した開発ボードであるといえる。また、同価格帯の他の開発ボードに比べて高性能であるため、処理能力の制約に悩まされることなく、制御系設計を行うことができる。モータドライバには STA6940M を用いており、DC モータの定電流制御によって倒立振子のトルク制御を行っている。制御用ボードのタイマー割り込み機能によって 20 ms の制御周期を設けてあり、この周期に則り、DC モータの制御及び PC-マイコン間のシリアル通信を行っている。

## 5. 解軌跡の可視化アプリケーション

本教材における倒立振子は、3つの状態変数  $\theta_b, \dot{\theta}_b, \dot{\theta}_w$  を持つ。したがって状態空間は3次元であり、安定化制御の下で解軌跡は平衡点（状態空間上の原点）に収束する。本アプリケーションは、振子の挙動を3次元曲線としてリアルタイムに可視化することで、学習者の状態フィードバック制御に対する直感的・視覚的理解の支援を行う。

本アプリケーションは開発環境として Processing を用いている。図 4 に本アプリケーションの表示画面を示す。

本アプリケーションは、画面左側に状態空間の3次元解軌跡、右側には個別の状態変数のグラフを表示する。解軌跡表示画面にある基準軸の色は右側のグラフと対応しており、赤色の軸は  $\theta_b$ 、黄緑色の軸は  $\dot{\theta}_b$ 、青色の軸は  $\dot{\theta}_w$  となっている。なお、各軸は正常な倒立動作時に見やすい軌跡となるよう任意の定数倍にスケールしている。シリアル通信を用いて制御用ボードと PC 間のデータの送受信を行っており、状態変数のグラフ、解軌跡両方のリアルタイムでの描画を可能としている。描画された解軌跡は、マウスのドラッグ操作により任意の角度からの観察を可能としている。また、画面上部には状態フィードバックゲイン  $k_n$  を設定する GUI も併せ持つ。

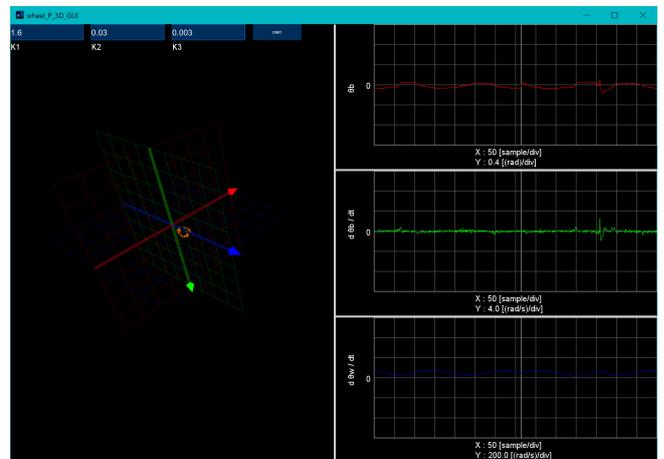


図 6 倒立動作時の解軌跡 ( $k_1 = 1.6, k_2 = 0.03, k_3 = 0.003$ )

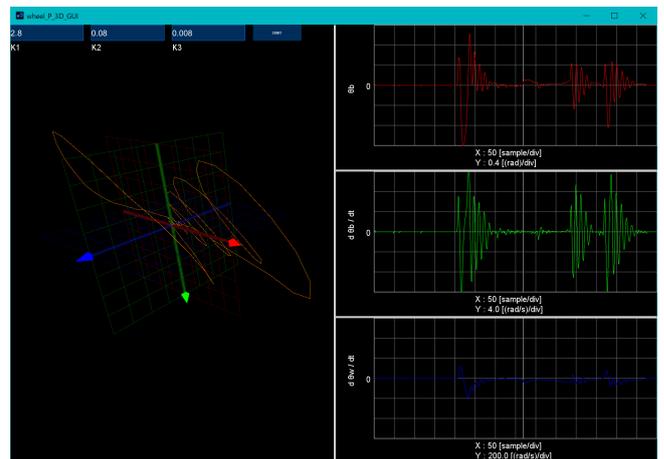


図 7 倒立動作中に外部から衝撃を与えた時の解軌跡 ( $k_1 = 2.8, k_2 = 0.08, k_3 = 0.008$ )

### 5.1 解軌跡の表示例

平衡点を  $(\theta_b, \dot{\theta}_b, \dot{\theta}_w) = (0, 0, 0)$  とし、状態変数  $\theta_b, \dot{\theta}_b, \dot{\theta}_w$  のフィードバックゲイン  $k_1, k_2, k_3$  を3通りに変化した場合の解軌跡の表示例をそれぞれ図 5, 図 6, 図 7 に示す。

図 5 では、フィードバックゲインを  $k_1 = 1.8, k_2 = 0.1,$

$k_3 = 0.0$  としてあり、慣性ロータの角速度  $\dot{\theta}_w$  にはフィードバックがかかっていない。3次元軌跡から、 $\theta_b$ 、 $\dot{\theta}_b$  の成分は0付近で振動しており、 $\dot{\theta}_w$  の成分は平衡点に収束せず微増していることが分かる。この解軌跡から、フィードバックのかかっていない項が時間経過により発散することが図形的に把握できる。

図6では、フィードバックゲインを  $k_1 = 1.6$ 、 $k_2 = 0.03$ 、 $k_3 = 0.003$  としてある。 $\dot{\theta}_b$  の成分はほぼ収束しているが、 $\theta_b$ 、 $\dot{\theta}_w$  の成分は僅かに振動しており、解軌跡は  $\theta_b$ 、 $\dot{\theta}_w$  平面上に小さい円環を形成している。この場合、システムは発散してはいないが平衡点付近に比較的長い周期の振動が残っていることでこのような解軌跡が描画される。この軌跡からは、制御量が僅かに不足していることがわかる。

図7では、フィードバックゲインを  $k_1 = 2.8$ 、 $k_2 = 0.08$ 、 $k_3 = 0.008$  とし、倒立状態において指で瞬間的に倒立振子を傾けた時の応答が図7に表示されている。この場合、速やかに倒立状態を回復するようなゲイン設定となっているため、傾けた瞬間は状態変数が大きく変動するが、解軌跡が螺旋を描きながら原点に向かって収束している。このように、本アプリケーションによって振子の挙動が解軌跡という曲線によって総括的に表されることがわかる。

## 6. まとめ

本研究では、現代制御理論の学習支援を目的とし、状態空間における解軌道を実働状態でインタラクティブに観察できる慣性ロータ型倒立振子実験教材の提案と実装を行った。本教材は従来のもより安価な部品で構成できるため、学習者が多人数いる環境でも個々人に配備し易い。また、学習者は解軌跡の観察から振子の振る舞いを図形的に把握できる。

## 参考文献

- [1] 中浦茂樹, 三平満司: 学生のやる気を引き出す制御実験 MATLAB と LabVIEW を併用した倒立振子実験, 計測と制御, Vol. 46, No. 9, pp. 705–708 (2007).
- [2] Gajamohan, M., Muehlebach, M., Widmer, T., Raffaello D'Andrea: The Cubli: A reaction wheel based 3D inverted pendulum, *IMU*, Vol. 2, No. 2 (2013).
- [3] 長谷川智洋, 三谷祐一郎: 慣性ロータを用いた倒立振子実験教材の開発, 沼津工業高等専門学校研究報告, No. 47, pp. 415–420 (2013).
- [4] 山下友矢, 大村基将, 鈴木裕貴, 紅林秀治: 乗車可能な車輪型倒立振子教材の開発, 日本産業技術教育学会誌, Vol. 61, No. 4, pp. 277–286 (2019).
- [5] Gajamohan, M., Merz, M., Thommen, I. and D'Andrea, R.: The cubli: A cube that can jump up and balance, *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 3722–3727 (2012).
- [6] 川田昌克: LEGO MINDSTORMS と Simulink Support Package を利用した制御工学教育コンテンツの開発, 自動制御連合講演会講演論文集 第57回自動制御連合講演会, 自動制御連合講演会, pp. 598–605 (2014).